Правительство Российской Федерации

Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики»

Кафедра Высшей математики

Программа дисциплины «Процессы массового обслуживания и стохастические модели в экономике»

Автор программы:

Шнурков Петр Викторович

Одобрена на заседании кафедры «___» _______________ 2012 г.
Зав. кафедрой Четвериков В.М.

Рекомендована секцией УМС «___» _______________ 2012 г.

Утверждена УС факультета «___» _______________ 2012 г.

Москва 2012

Содержание комплекса

Пояснительная записка к курсу «Процессы массового обслуживания и стохастические модели в экономике»

Введение

Курс «Процессы массового обслуживания и стохастические модели в экономике» является продолжением курса «Случайные процессы и теория массового обслуживания».
Такой курс традиционно читается в течение ряда лет на факультете прикладной математики и факультете математической экономики МИЭМ. Курс читается в шестом семестре для студентов, обучающихся по специальности «Математические методы в экономике». Согласно учебному плану объем аудиторных занятий в шестом семестре- 2 часа лекций и 1 час семинарских занятий в неделю. Кроме того, предусмотрена курсовая работа.

При разработке данного курса и в ходе его изучения я как лектор ставил перед собой две главные задачи:

1. Познакомить слушателей с фундаментальными основами общей теории случайных процессов и ее отдельных разделов, посвященных различным видам случайных процессов.
2. Сформировать у слушателей общее представление о приложениях теории случайных процессов в естественных науках, в технике и в экономике.

В связи с этим, в курсе рассматриваются многие глубокие и весьма сложные вопросы, касающиеся общих свойств случайных процессов и их отдельных видов. В то же время на лекциях и на практических занятиях рассматривается целый ряд стохастических моделей, имеющих конкретное прикладное содержание. В основном эти модели носят экономический характер.

Учебная дисциплина, связанная с какой-либо областью фундаментальной науки, должна в целом отражать современное состояние и особенности этой области науки. Современная теория случайных процессов представляет собой специфическую область фундаментальной математики, в которой используются многие сложные и глубокие идеи, формальные понятия и конструкции. Соответствующая учебная дисциплина по объективным причинам является сложной для изучения и восприятия. Задача лектора состоит в том, чтобы найти форму изложения теоретического материала и создать методическое обеспечение этого изложения, которое позволит успешно изучать курс каждому студенту, серьезно и ответственно относящемуся к процессу своего образования. Именно этой цели служат методические материалы, приведённые в дальнейшем.

П.В. Шнурков

Общая методическая характеристика дисциплины

Программа курса «Процессы массового обслуживания и стохастические модели в экономике» предназначена для реализации государственных требований к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников по специальности «математические методы в экономике» (080116) и (061800) и является единой для всех форм обучения.

Дисциплина «Процессы массового обслуживания и стохастические модели в экономике» изучается студентами данных специальностей после изучения курса «Случайные процессы и теория массового обслуживания» и является обще профессиональной дисциплиной.

Целью преподавания данной дисциплины является получение фундаментальных знаний об общих свойствах случайных процессов, а также основных свойствах отдельных классов случайных процессов (марковские процессы с непрерывным временем и дискретным множеством состояний, процессы восстановления, случайные процессы в системах массового обслуживания, марковские процессы с непрерывным временем и непрерывным множеством состояний, стохастические интегралы и стохастические дифференциальные уравнения).

Задача преподавания дисциплины состоит в создании у студентов устойчивого представления о многообразии изучаемых стохастических моделей и возможностях их использования при анализе реальных систем и процессов в экономике, технике и естественных науках.

Требования к уровню освоения содержания дисциплины (требования к знаниям, умениям и навыкам, приобретенным в результате изучения дисциплины).

1) знание основных понятий, определений, формулировок теорем и других фундаментальных результатов теории случайных процессов.
2) знание общих свойств и особенностей различных классов случайных процессов, а также важнейших характеристик данных процессов.
3) умение устанавливать связи между различными результатами и свойствами случайных процессов и других стохастических моделей.
4) умение осмысливать математические обоснования результатов теории и разбираться в доказательствах теорем, приведенных в курсе.
5) умение проводить логические рассуждения и аналитические выводы, аналогичные тем, которые используются при изучении данной дисциплины.
6) умение использовать учебную и учебно-научную литературу для уточнения и осмысления результатов, приведенных в ходе изучения данной дисциплины.
7) умение использовать полученные знания для изучения новых разделов теории случайных процессов, а также других математических дисциплин, в которых исследуются проблемы применения стохастических моделей в различных областях экономики и техники (стохастическая финансовая математика, математическая теория страхования, теория немарковских систем массового обслуживания, математическая теория эффективности и надежности, стохастическая теория дифференциальных систем, стохастическая теория физико-химических процессов и т.д.).
8) навыки работы с учебной литературой, нахождения и самостоятельного изучения необходимых материалов по данному курсу.
9) навыки самостоятельного изучения материалов лекций
10) навыки самостоятельного анализа и решения задач, предлагаемых на практических занятиях и контрольных работах

Оценка результатов работы студента. Пункты 1, 2, 6 (частично), 9, 10 характеризуют минимальный объем знаний, умений и навыков, которыми должен обладать студент в результате изучения данного курса. Освоение курса в объеме пунктов 3, 4, 8 соответствуют хорошему, добротному уровню приобретенных знаний, умений и навыков. Пункты 5, 6 (в достаточно полном объеме), 7 характерны для высокого уровня овладения дисциплиной, на таком уровне могут работать только наиболее подготовленные и добросовестные студенты.

Учебно-тематический план дисциплины

В первой графе таблицы указываются виды аудиторных и самостоятельных занятий студентов. Во второй графе указывается общая трудоемкость дисциплины в соответствии с ГОС ВПО, объем аудиторных и самостоятельных занятий – в соответствии с примерным учебным планом. В третьей и четвертой графе указываются номера семестров (если их два), в которых предусматривается каждый вид учебной работы и вид итогового контроля по дисциплине.

Объем дисциплины и виды учебной работы.

Вид учебной работы	Всего часов	Часы
Общая трудоемкость дисциплины	220	108
Аудиторные занятия		
Лекции (Л)	68	34
Практические занятия (ПЗ)		
Семинары (С)	34	16
Лабораторные работы (ЛР)		
И (или) другие виды аудиторных занятий		
Самостоятельная работа	118	58
Курсовой проект (работа)		
Расчетно-графические работы		
Реферат		
И (или) другие виды самостоятельной работы	К.р.	1
Вид итогового контроля (зачет, экзамен)		экзамен

Учебно-тематический план дисциплины

В учебно-тематическом плане приводится перечень тем, которые могут делиться на разделы и части. После этого размещается подробное содержание тем курса, дополненное Семинарскими или практическими занятиями, самостоятельной работой (с целями и задачами). Обязательно приводится ссылка на литературу и знания и умения студента, полученные после изучения раздела.

		Аудиторные занятия		
№	Раздел дисциплины	Лекции	ПЗ	ЛР
1.	Марковские процессы с непрерывным временем и дискретным множеством состояний. Основные характеристики и свойства марковских процессов.	2 час.	4 час.	
2.	Марковские процессы с непрерывным временем и дискретным множеством состояний. Специальные виды марковских процессов, их свойства и приложения.	2 час.	12 час.	
3.	Процессы восстановления.	4 час.	12 час.	
4.	Марковские процессы с непрерывным временем и непрерывным множеством состояний. Основные свойства марковских процессов. Диффузионные модели	4 час.	-	
5.	Основы стохастического исчисления. Стохастический интеграл Ито и стохастические дифференциальные уравнения.	4 час.	-	

Содержание разделов дисциплины.

1. Марковские процессы с непрерывным временем и дискретным множеством состояний. Основные характеристики и свойства марковских процессов. (6 часов)

Определение марковского процесса. Вероятности перехода, их свойства. Уравнение Колмогорава-Чепмена. Выражение конечномерных распределений через вероятности перехода. Однородные марковские процессы. Свойство непрерывности в нуле.

Инфинитезимальные характеристики марковских процессов. Теоремы существования пределов $a_{ij} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}p_{ij}(\Delta) < \infty, i \neq j; a_i = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}[1 - p_{ii}(\Delta)] \leq \infty$ (без доказательства). Соотношения для инфинитезимальных характеристик. Регулярные состояния. Дифференциальные уравнения Колмогорова для вероятностей перехода (прямая и обратная системы). Метод вывода. Теоремы о справедливости прямой и обратной систем для счётного множества сотояний (без доказательства). Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний.

Свойства траекторий марковских процессов. Скачкообразные траектории, моменты изменения состояний $\{t_n, n \geq 0\}$. Последовательность $\{\xi_n = \xi(t_n), n = 0,1,2,\ldots\}$-вложенная цепь Маркова. Длительности пребывания в состояниях $\theta_n = t_{n+1} - t_n$, распределение $P(\theta_n < x|\xi_n = i) = 1 - e^{-a_i x}, n = 0,1,2,\ldots$ (без доказательства). Свойство отсутствия последействия для экспоненциального распределения. Связь отсутствия последействия с марковским свойством процесса в произвольный момент времени.

Распределение вероятностей переходов (скачков) процесса в моменты изменения состояний. Вероятности перехода вложенной цепи Маркова $a_{ij} = P(\xi_{n+1} = j|\xi_n = i) = \frac{a_{ij}}{a_i}, j \neq i$. Описание траектории марковского процесса (конструктивное определение). Устойчивые, мгновенные и поглощающие состояние процесса. Свойство регулярности марковского процесса в широком смысле и его теоретическое значение. Лит. :[2](осн.);[2],[3],[4],[5](доп.)

2. Марковские процессы с непрерывным временем и дискретным множеством состояний. Специальные виды марковских процессов, их свойства и приложения (4 часа).

Процесс гибели и размножения (ПГР). Определение, основные свойства ПГР, связанные с общими свойствами марковского процесса. Необходимые и достаточные условия существования предельного (стационарного) распределения, явное представление предельного распределения.

Пуассоновский процесс. Определение пуассоновского процесса как однородного марковского (процесса чистого размножения). Вероятности состояний и переходные вероятности. Свойства траекторий. Распределение приращений. Пуассоновский процесс как процесс с независимым приращениями.

Лит.: [1],[2](осн.);[1],[3],[4],[5](доп.)

3. Процессы восстановления.(8 часов).

Стохастическая модель восстановления как точечного процесса, определяемого последовательностью случайных точек на временной оси. Считающие процессы. Функции восстановления. Интегральные уравнения для функций восстановления. Вероятностный смысл дифференциала функции восстановления.

Предельные теоремы для процессов восстановления. Элементарная теорема восстановления (теорема 1; без доказательства). Понятие решетчатого (арифметического) распределения, примеры. Теорема Блекуэлла (теорема 2; без доказательства). Определение непосредственной интегрируемости по Риману. Узловая теорема восстановления (теорема 3; без доказательства). Анализ условий узловой теоремы восстановления: исследование непосредственной интегрируемости по Риману, достаточные условия для непосредственной интегрируемости.

Применения узловой теоремы восстановления. Распределения прямого и обратного времени возвращения (нестационарный случай). Нахождение соответствующих предельных распределений при помощи узловой теоремы восстановления. Простой процесс восстановления с экспоненциальным распределением интервалов между восстановлениями. Парадокс времени ожидания. Альтернирующий процесс восстановления. Вероятности того, что момент времени t накрывается интервалом первого или второго типа. Предельные значения указанных вероятностей (вывод при помощи узловой теоремы восстановления). Лит.: [1],[5](доп.)

4. Марковские процессы с непрерывным временем и непрерывным множеством состояний. Основные свойства марковских процессов. Диффузионные модели. (8 часов).

Общее понятие марковского процесса. Переходные функции (вероятности перехода) и их свойства. Теорема существования марковского процесса со множеством состояний $\mathrm{X} = R$ (вариант теоремы Колмогорова о системе согласованных вероятностных мер). Плотности вероятностей перехода и совместные плотности распределений значений процесса в различные моменты времени. Совместные (конечномерные) распределения значений процесса и их представления через плотности вероятностей перехода. Однородные марковские процессы и соответствующие соотношения для плотностей вероятностей перехода и совместных распределений.

Диффузионные марковские процессы. Определения однородного и неоднородного диффузионных процессов. Теорема Колмогорова о достаточных условиях выполнения обратного дифференциального уравнения Колмогорова. Различные варианты обратного уравнения. Теорема о достаточных условиях выполнения прямого дифференциального уравнения (уравнение Колмогорова – Фоккера - Планка). Прямое диффузионное уравнение для однородных процессов.

Винеровский процесс (броуновское движение). Определение винеровского процесса как процесса с независимыми приращениями. Стандартный винеровский процесс $w(t)$.Вероятностные характеристики винеровского процесса: плотности вероятностей перехода и вероятностей состояний, совместные распределения. Свойства траекторий винеровского процесса. Распределения важнейших функционалов от винеровского процесса.

Теорема об условных распределениях винеровского процесса при фиксированных значениях траектории на концах интервала времени. Броуновский мост и его характеристики.

Краткая история создания теории диффузионных процессов и их приложений в физике и экономике. Лит.:[1],[2](осн.);[1],[2],[6],[7](доп.)

5. Основы стохастического исчисления. Стохастический интеграл Ито и стохастические дифференциальные уравнения (10 часов).

Общая идея и методика построения стохастического интеграла. Пространство L_2 случайных величин с конечным вторыми моментами. Основные структуры пространства L_2 (линейные операции, скалярное произведение, норма, сходимость). L_2 как полное нормированное (банахово) пространство.

Стохастический интеграл первого рода как интеграл от случайной функции по неслучайной (лебеговой) мере. Определение и основные свойства стохастического интеграла первого рода.

Понятие стохастического интеграла по случайной мере (стохастический интеграл второго рода). Стохастический интеграл от простой случайной функции (определение, основные свойства). Класс случайных функций, допускающих приближение простыми. Стохастический интеграл Ито как предел в среднеквадратическом интегралов от простых функций в пространстве L_2. Достаточные условия существования стохастического интеграла Ито.

Процесс Ито (процесс, имеющий стохастический дифференциал). Теорема о стохастическом дифференциале сложной функции (формула Ито в дифференциальном и интегральном вариантах). Детерминированный аналог дифференциала сложной функции. Стохастический интеграл Стратоновича и соответствующий аналог формулы для стохастического дифференциала сложной функции. Частный случай формулы Ито для сложной функции $\eta(t) = u(t, w(t))$.

Понятие стохастического дифференциального уравнения (СДУ). Формальное определение решения стохастического дифференциального уравнения. Непрерывность решения СДУ. Теорема существования и единственности решения СДУ (общая формулировка). Замечания об условиях теоремы. Понятие единственности решения как совпадение траекторий с вероятностью, равной единице. Решение СДУ как марковский диффузионный процесс.

Экономическая интерпретация модели СДУ (стохастическая модель эволюции финансового актива в рыночной среде). Качественное (неформальное) обоснование стохастического соотношения $dS(t) = \alpha(t, S(t))dt + \beta(t, S(t))dW(t)$, где $S(t)$ - случайный процесс, описывающий поведение финансового параметра.

Классические диффузионные модели финансовых активов. Модель Башелье (винеровский процесс со сносом и диффузией). Модель Самуэльсона (геометрическое броуновское движение). Стохастическое дифференциальное уравнение для геометрического броуновского движения. Связь модели Самуэльсона с представлением относительной доходности для данного финансового актива.

Лит.:[6],[7](доп.)

Понедельный план проведения лекционных и практических занятий.

План лекционных занятий.

Раздел 1. Марковские процессы с непрерывным временем и дискретным множесвом состояний. Основные характеристики и свойства марковских процессов.

Лекция №1. Определение марковского процесса. Вероятности перехода, их свойства. Уравнение Колмогорава-Чепмена. Выражение конечномерных распределений через вероятности перехода. Однородные марковские процессы. Свойство непрерывности в нуле.

Инфинитезимальные характеристики марковских процессов. Теоремы существования пределов $a_{ij} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} p_{ij}(\Delta) < \infty, i \neq j; a_i = \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta}[1 - p_{ii}(\Delta)] \leq \infty$ (без доказательства). Соотношения для инфинитезимальных характеристик. Регулярные состояния. Дифференциальные уравнения Колмогорова для вероятностей перехода (прямая и обратная системы). Метод вывода. Теоремы о справедливости прямой и обратной систем для счётного множества сотояний (без доказательства). Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний.

Свойства траекторий марковских процессов. Скачкообразные траектории, моменты изменения состояний $\{t_n, n\geq 0\}$. Последовательность $\{\xi_n = \xi(t_n), n = 0,1,2, \dots\}$-вложенная цепь Маркова. Длительности пребывания в состояниях $\theta_n = t_{n+1} - t_n$, распределение $P(\theta_n < x|\xi_n = i) = 1 - e^{-a_i x}, n = 0,1,2, \dots$ (без доказательства). Свойство отсутствия последействия для экспоненциального распределения. Связь отсутствия последействия с марковским свойством процесса в произвольный момент времени.

Распределение вероятностей переходов (скачков) процесса в моменты изменения состояний. Вероятности перехода вложенной цепи Маркова $a_{ij} = P(\xi_{n+1} = j|\xi_n = i) = \frac{a_{ij}}{a_i}, j \neq i.$ Описание траектории марковского процесса (конструктивное определение). Устойчивые, мгновенные и поглощающие состояние процесса. Свойство регулярности марковского процесса в широком смысле и его теоретическое значение.

Раздел 2. Марковские процессы с непрерывным временем и дискретным множеством состояний. Специальные виды марковских процессов, их свойства и приложения.

Лекция №2. Процесс гибели и размножения (ПГР). Определение, основные свойства ПГР, связанные с общими свойствами однородных марковских процессов. Дифференциальные уравнения Колмогорова для вероятностей состояний ПГР. Уравнения для стационарного распределения и их решение. Необходимые и достаточные условия существования предельного (стационарного) распределения (без доказательства). Явное представление предельного распределения. Анализ достаточных условий существования предельного распределения, аналогия с моделью случайного блуждания с дискретным временем.

Пуассоновский процесс. Определение пуассоновского процесса как однородного марковского (процесса чистого размножения). Дифференциальные уравнения Колмогорова для вероятностей состояний и переходных вероятностей, их решение методом производящих функций. Формулы для вероятностей состояний и переходных вероятностей. Общая характеристика траекторий пуассоновского процесса. Распределение приращений. Пуассоновский процесс как процесс с независимыми приращениями. Общая схема создания формальной теории случайного процесса, ее принципиальное значение.

<u>Раздел 3.</u> Процессы восстановления.

<u>Лекция №3.</u> Стохастическая модель восстановления как точечного процесса, определяемого последовательностью случайных точек на временной оси. Определения процессов восстановления (ПВ) двух видов – простого и с запаздыванием. Процессы восстановления в марковских моделях с дискретным и непрерывным временем. Считающие процессы, их связь с моделью восстановления. Функции восстановления.

Интегральные уравнения для функций восстановления. Решение интегрального уравнения восстановления методом преобразований Лапласа-Стильтьеса. Вероятностный смысл дифференциала функции восстановления.

Предельные теоремы для процессов восстановления. Элементарная теорема восстановления (теорема 1; без доказательства). Решетчатые (арифметические) распределения, примеры. Теорема Блекуэлла (теорема 2; без доказательства). Смысл полученного результата, его связь с понятием интенсивности ПВ.

Вспомогательные результаты из математического анализа. Понятие непосредственной интегрируемости по Риману. Интегрируемость по Риману на конечном интервале и на интервале $[0,\infty)$, отличие от непосредственной интегрируемости.

Условия, достаточные для непосредственной интегрируемости. Понятие функции с ограниченным изменением (вариацией). Лемма 1 (условия абсолютной интегрируемости и ограниченности изменения заданной функции). Следствие: монотонная, ограниченная, интегрируемая функция является непосредственно интегрируемой. Лемма 2 (условия абсолютной интегрируемости функции и её производной). Лемма 3 (условия, связанные с мажорируемостью функции).

Узловая теорема восстановления (теорема 3; без доказательства).

<u>Лекция №4.</u> Применения узловой теоремы восстановления.

1) Распределения прямого и обратного времени возвращения. Понятия прямого и обратного времени возвращения. Соотношения для допредельных (нестационарных) распределений (схема вывода). Предельные распределения прямого и обратного времени возвращения.

Случай экспоненциального распределения интервалов между восстановлениями. Парадокс времени ожидания, его объяснение.

2) Стационарные характеристики альтернирующего процесса восстановления (АПВ). Определение АПВ. Вероятности $K_1(t), K_2(t)$ того, что фиксированный момент времени t накрывается интервалом 1 или 2 вида соответственно. Представление для $K_1(t)$ в нестационарном режиме. Предельные вероятности $K_1(t) = \lim_{t\to\infty} K_1(t), K_2 = 1 - K_1$. Прикладное значение полученных результатов.

<u>Раздел 4.</u> Марковские процессы с непрерывным временем и непрерывным множеством состояний. Основные свойства марковских процессов. Диффузионные модели.

<u>Лекция №5.</u> Общее понятие марковского процесса. Марковское свойство. Переходные функции (вероятности перехода) $P(s;x;t;B), 0 \le s < t; x \in X, B \in ß(X)$ - борелевское множество; свойства вероятностей перехода, уравнения Колмогорова-Чепмена.

Теорема существования марковского процесса со множеством состояний X=R (вариант теоремы Колмогорова о системе согласованных вероятностных мер). Формулировка теоремы и ее обсуждение (без доказательства).

Плотности вероятностей перехода. Аналог уравнений Колмогорова-Чепмена для плотностей вероятностей перехода (уравнение Маркова – Смолуховского). Совместная плотность распределения значений процесса в различные моменты времени и ее выражение через плотности вероятностей перехода. Совместное конечномерное распределение значений процесса, его представление через совместную плотность. Совместные распределения при начальном условии $\xi(t_0)=x_0$. Однородные марковские процессы и соответствующие вероятностные характеристики.

Диффузионные процессы.

Общее определение диффузионного процесса (однородный марковский процесс с заданными свойствами). Коэффициенты сноса и диффузии. Два варианта определения, их особенности. Идея стохастической диффузионной модели.

Уравнения Колмогорова для диффузионных процессов (уравнения диффузии). Теорема Колмогорова о достаточных условиях выполнения обратного диффузионного уравнения (уравнения Колмогорова) для функции вероятностей перехода $P(t,x,B)$.

Другие варианты обратного уравнения Колмогорова. Обратное уравнение для плотности вероятностей перехода $P(t,x,y)$ однородного диффузионного процесса.

Теорема о достаточных условиях выполнения прямого диффузионного уравнения (уравнения Колмогорова – Фоккера – Планка) для плотности вероятностей перехода однородного процесса (без доказательства). Прямое диффузионное уравнение для однородного диффузионного процесса.

Исторические замечания о развитии теории марковских и диффузионных процессов. Работы по физике Фоккера (1914) и Планка (1917). Фундаментальное исследование Колмогорова (1931) –создание основ теории марковских процессов с непрерывным временем и непрерывным множеством состояний.

Лекция №6. Винеровский процесс (броуновское движение).

Определение винеровского процесса как процесса с независимыми приращениями. Стандартный винеровский процесс $w(t)$. Винеровский процесс как частный случай однородного диффузионного процесса с характеристиками a(x)=0, b(x)=1. Вероятностные характеристики винеровского процесса: плотность вероятностей перехода, вероятности перехода, плотность вероятностей состояний. Совместная плотность распределений значения процесса.

Исторические замечания о создании модели броуновского движения: открытие физического явления Р. Броуном (1827), разработка теории физического явления А. Эйнштейном и М. Смолуховским (1905), стохастическая модель Н. Винера (1918). Применение в экономической теории – работа Л. Башелье (1900).

Свойства траекторий винеровского процесса. Теорема о непрерывности траекторий винеровского процесса «в целом». Доказательство. Теорема о недифференциируемости траекторий винеровского процесса «в целом» (без доказательства).

Раздел 5. Основы стохастического исчисления. Стохастический интеграл Ито и стохастические дифференциальные уравнения.

Лекция №7. Общая идея построения стохастического интеграла.

Пространство L_2 случайных величин с действительными или комплексными значениями и конечными вторыми моментами. Скалярное произведение в пространстве L_2; проверка аксиом скалярного произведения. Норма, порождаемая скалярным произведением. Сходимость по заданной норме как сходимость случайных величин в среднеквадратическом. Свойство полноты. Пространство L_2 как полное нормированное (банахово) пространство.

Стохастический интеграл первого рода как интеграл от случайной функции по неслучайной (лебеговой) мере. Определение стохастического интеграла первого рода как предела интегральных сумм в пространстве L_2. Теорема о достаточных условиях существования стохастического интеграла первого рода (без доказательства). Свойства стохастического интеграла первого рода.

Построение стохастического интеграла по случайной мере, порождаемой винеровским процессом $w(t)$ (стохастический интеграл Ито). Понятие случайного процесса, неупреждающего по отношению к $w(t)$. Стохастический интеграл от простой случайной функции (интегральная сумма). Зависимость интеграла от выбора промежуточной точки внутри элемента разбиения. Свойства стохастических интегралов от простых функций. Стохастический интеграл Ито как предел в среднеквадратическом интегралов от простых функций.

Класс случайных функций, допускающих приближение простыми. Достаточные условия существования стохастического интеграла Ито.

Понятие стохастического интеграла второго рода как интеграла от случайной функции по случайной мере, порождаемой процессом с независимыми приращениями.

Стохастический интеграл Стратоновича и особенности его использования.

<u>Лекция №8.</u> Процесс Ито (процесс, имеющий стохастический дифференциал). Определение процесса Ито и аналогия с детерминированной дифференциальной моделью. Понятие стохастического дифференциала.

Теорема о стохастическом дифференциале сложной функции (без доказательства). Формула Ито в дифференциальном и интегральном вариантах. Детерминированный аналог формулы для полного дифференциала сложной функции, его отличие от стохастического. Формула стохастического дифференциала сложной функции при использовании интеграла Стратоновича. Частный случай формулы Ито для сложной функции $\eta(t) = u(t, w(t))$.

Понятие стохастического дифференциального уравнения (СДУ). Формальное определение решения стохастического дифференциального уравнения. Непрерывность решения СДУ.

Теорема существования и единственности решения СДУ (полная формулировка, без доказательства). Замечания об условиях теоремы. Понятие единственности непрерывного решения как совпадение траекторий процессов на любом конечном интервале времени с вероятностью, равной единице. Решение СДУ как марковский диффузионный процесс.

Экономическая интерпретация модели СДУ (стохастическая модель эволюции финансового актива в рыночной среде). Качественное (неформальное) обоснование стохастического соотношения
$dS(t) = \alpha(t, S(t))dt + \beta(t, S(t))dw(t)$,
где $S(t)$ - случайный процесс, описывающий поведение стоимости указанного финансового актива.

Стохастические диффузионные модели финансовых активов. Модель Башелье (винеровский процесс со сносом и диффузией). Модель Самуэльсона (геометрическое броуновское движение) S(t). Представление геометрического броуновского движения через винеровский процесс. Распределение значений процесса S(t). Свойства траекторий. Стохастическое дифференциальное уравнение для геометрического броуновского движения $dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dw(t)$, где μ, σ - заданные параметры. Непосредственная проверка того, что процесс S(t) удовлетворяет данному СДУ при помощи формулы Ито. Представление относительной доходности финансового актива в модели Самуэльсона.

План семинарских занятий.

<u>Раздел</u> Марковские процессы с непрерывным временем и дискретным множесвом состояний. Основные характеристики и свойства марковских процессов.

<u>Занятие №1.</u> Марковская модель системы с четырьмя состояниями.

Описание модели. Экономическая интерпретация (структура, состоящая из двух независимых подсистем, каждая из которых может выполнять один вид работ или простаивать в ожидании работы). Случайный процесс $\xi(t)$ с четырьмя состояниями, описывающий функционирование системы. Обоснование марковского свойства процесса $\xi(t)$ при помощи свойств экспоненциальных распределений.

Методика исследования переходных вероятностей процесса $\xi(t)$ за период времени $(t, t+\Delta)$ с использованием свойств экспоненциальных операций.

Методика основана на введении вспомогательных событий, определяемых числом операций, завершившихся в системе в интервале $(t, t+\Delta)$. Кроме того, используются интегральные представления для соответствующих вероятностей, интегрирование в которых производится по распределению одной из операций.

<u>Занятие №2.</u> Марковская модель системы с четырьмя состояниями (завершение анализа).

Определение интенсивностей перехода и выхода процесса $\xi(t)$. Составление дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностных состояний. Определение предельных (стационарных) вероятностей состояний процесса $\xi(t)$. Представление стационарного функционала средней удельной прибыли, связанной с рассматриваемой системой. Экономическая интерпретация данного показателя.

<u>Раздел</u> Марковские процессы с непрерывным временем и дискретным множеством состояний. Специальные виды марковских процессов, их свойства и приложения.

<u>Занятие №3.</u> Процессы гибели и размножения (ПГР).

Теоретические сведения (обзоор). Определение ПГР как однородного марковского процесса. Инфизитезимальные характеристики ПГР. Вероятностные распределения, связанные с траекториями ПГР. Общие свойства траекторий. Проблема существования предельного распределения ПГР. Необходимые и достаточные условия существования предельного рпаспределения. Представление предельных вероятностей ПГР в явной форме.

<u>Занятие №4.</u> Процессы гибели и размножения (ПГР).

<u>Задача 1.</u> Марковская модель функционирования торговой системы (магазин, $n \geq 1$ отделов, одна касса). Описание модели. Случайный процесс $\xi(t)$- число покупателей в кассе, его свойства. Метод исследования процесса $\xi(t)$, доказательство того, что $\xi(t)$ является ПГР, определение интенсивностей перехода. Проверка условия существования предельного распределения, вывод формул для предельных вероятностей и соответствующего математического ожидания.

Выдача домашнего задания на тему «Марковские процессы с непрерывным временем и дискретным множеством состояний».

<u>Занятие №5</u>. Пуассоновский процесс.

Теоретические сведения (обзор). Основные определения пуассоновского процесса как однородного марковского процесса или процесса чистого размножения. Вероятностные распределения, связанные с траекториями пуассоновского процесса. Общие свойства траекторий.

Вероятностные характеристики пуассоновского процесса (распределение вероятностей состояний процесса в произвольный момент времени, вероятности перехода пуассоновского процесса).

Определение пуассоновского процесса как процесса с независимыми приращениями.

Задача 1.

Известно, что случайное время между моментами скачков пуассоновского процесса имеет экспоненциальное распределение с параметром λ

$$P(\Theta_k < x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Доказать, что момент t_n n-го скачка пуассоновского процесса имеет распределение Эрланга с параметрами (n, λ).

Тогда функция распределения случайной величины $t_n = \sum_{k=1}^{n} \Theta_k$ примет вид:

$$F_n(x) = P(t_n < x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} \qquad (1)$$

а плотность распределения:

$$f_n(x) = \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, n = 1,2,\ldots \qquad (2)$$

Занятие №6. Процессы в системах массового обслуживания.

Теоретические сведения. Краткая характеристика марковской модели массового обслуживания. Простейший (пуассоновский) входящий поток, закон обслуживания, структура системы. Символика Кендалла.

Марковские процессы, описывающие функционирование систем массового обслуживания, и методы их анализа. Использование теории процессов гибели и размножения.

Занятие №7. Процессы в системах массового обслуживания.

Задача 1. Рассмотрим систему $M|M|n|0$ (системы с отказами).

Заданный в ней входящий поток – простейший с некоторым параметром $\lambda > 0$. Время обслуживания распределено во экспоненциальному закону с неизвестным параметром $\mu > 0$. Число обслуживающих устройств равно n, очередь не допускается. Пусть $\xi(t)$- число требований в системе в момент времени t.

1) Доказать, что $\xi(t) -$ процесс гибели и размножения;
2) Найти предельное (стационарное) распределение данного процесса (так называемые формулы Эрланга).

Задача 2. Рассмотрим систему $M|M|n|\infty$. Заданный в ней входящий поток – простейший с некоторым параметром $\lambda > 0$. Закон обслуживания – экспоненциальный с известным параметром $\mu > 0$. Число обслуживающих устройств равно n, при этом $N = \infty$, то есть длина очереди не ограничена. Пусть $\xi(t)$ $-$число требований в системе в момент времени t. Необходимо исследовать этот процесс и найти его характеристики.

1) Доказать, что $\xi(t)$ $-$процесс гибели и размножения;
2) Найти условия существования предельного (стационарного) распределения данного процесса;
3) Выписать это стационарное распределение в явном виде.

Занятие №8. Процессы в системах массового обслуживания.

Задача 1.

Рассмотрим систему $M|M|n|\infty$. Проведем исследование распределения времени ожидания начала обслуживания в системе $M|M|n|\infty$. Пусть γ - время ожидания в очереди до начала обслуживания, т.е. случайное время от момента поступления требования в систему до начала обслуживания на одном из приборов. Найти явное представление для распределения случайной величины γ в стационарном режиме функционирования системы.

Замечание. Для этой случайной величины более удобно находить не саму функцию распределения $P(\gamma < t)$, а вероятность дополнительного события $P(\gamma > t)$.

Раздел «Процессы восстановления».

Занятие №9. Процессы восстановления (обзор теоретических результатов). Общее определение процесса восстановления (ПВ). Считающий процесс. Функции восстановления. Интегральные уравнения восстановления.

Предельные теоремы для процессов восстановления. Элементарная теорема восстановления. Теорема Блекуэлла.

Понятие функции, непосредственно интегрируемой по Риману. Достаточные условия для непосредственной интегрируемости.

Узловая теорема восстановления (общая формулировка).

Занятие №10. Процессы восстановления (общая теория).

Задача 1. Найти распределение момента n-го восстановления в пуассоновском процессе восстановления.

Указание. Воспользоваться формулой для преобразования Лапласа-Стилтьеса распределения суммы независимых случайных величин.

Задача 2.

Найти функцию восстановления для процесса восстановления с запаздыванием, который определяется функциями распределения:

$$F_1(x) = P(\xi_1 < x) = 1 - e^{-\lambda_1 x},\ \ F(x) = P(\xi_n < x) = 1 - e^{-\lambda x},\ \ n = 2,3, \dots$$

Указание. Воспользоваться решением интегрального уравнения восстановления в терминах преобразования Лапласа-Стилтьеса.

Занятие №11. Процессы восстановления. Предельные теоремы.

Задача 1. Модель поступления однотипных заказов с фиксированной оплатой. Определение математического ожидания дохода, полученного за время $(t, t+\tau)$ и соответствующей предельной характеристики при $t \to \infty$. Использование теоремы Блекуэлла.

Задача 2. Стохастическая модель потребления и пополнения уровня запаса. Описание модели, основные вероятностные характеристики. Процесс восстановления в рассматриваемой системе и процесс, непосредственно описывающий уровень запаса.

Занятие №12. Процессы восстановления. Предельные теоремы.

Стохастическая модель потребления и пополнения уровня запаса. Описание модели, основные вероятностные характеристики. Процесс восстановления в рассматриваемой системе и процесс, непосредственно описывающий уровень запаса. (продолжение исследования).

Стохастическая модель потребления и пополнения уровня запаса. Представление для вероятности события A_t, заключающегося в наличии товара на заданном интервале времени $(t, t+z)$. Общий подход к представлению вероятностей различных событий, связанных с процессом восстановления. Нахождение аналитического интегрального представления для вероятности события A_t с использование функции восстановления. Применение узловой теоремы восстановления для определения предельного значения указанной вероятности при $t \to \infty$. Проверка условий узловой теоремы восстановления. Проведение аналитических преобразований и получение окончательного результата.

Выдача домашнего задания на тему «Процессы восстановления».

Занятие №13. Процессы восстановления. Распределение прямого и обратного времени возвращения.

Задача 1. Найти распределение обратного времени возвращения в процессе восстановления, то есть функцию распределения

$$F_t^{(0)}(x) = P(\xi_t^{(0)} < x)$$

при любом фиксированном значении t и соответствующее предельное распределение.

Занятие №14. Процессы восстановления. Распределение прямого и обратного времени возвращения.

Задача 1.

Найти распределение прямого и обратного времени возвращения в процессе восстановления: $\tilde{\xi}_t = \xi_t^{(0)} + \xi_t^{(1)}$, то есть функцию распределения

$$G_t(x) = P(\xi_t^{(0)} + \xi_t^{(1)} < x)$$

при любом значении t и соответствующее предельное распределение.

Раздел Марковские процессы с непрерывным временем и непрерывным множеством состояний. Основные свойства марковских процессов.

Диффузионные модели.

Занятие №15. Винеровский процесс. Основные свойства.

Винеровский процесс. (краткие теоретические сведения). Определение винеровского процесса как процесса с независимыми приращениями. Вероятностные характеристики винеровского процесса. Свойства траекторий винеровского процесса. Винеровский процесс как диффузионный. Уравнения Колмогорова (обратное) и Фоккера-Планка для винеровского процесса.

Задача 1. Доказать, что функция $p(t; x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}$ является решением уравнения Колмогорова (обратного) и Фоккера-Планка (прямого) для варианта, когда коэффициент сноса $a(x) = 0$, а коэффициент диффузии $b^2(x) = 1$.

Задача 2. Доказать, что корреляционная функция винеровского процесса имеет вид $K_w(s,t)=min(s,t)$

Замечание. Возможны два способа доказательства данного результата.

Занятие №16. Винеровский процесс. Распределения случайных величин, связанных с траекториями.

Задача 1. Пусть $w(t)$ − стандартный винеровский процесс.

Обозначим $w_t^{(+)} = \max_{s\in[0,t]} w(s)$, то есть случайная величина $w_t^{(+)}$ представляет собой максимальное значение винеровского процесса на заданном интервале времени.

Найти функцию распределения $F_t^{(+)}(x) = P(w_t^{(+)} < x)$ случайной величины $w_t^{(+)}$ при любом $t > 0$.

Занятие №17. Стохастические модели, связанные с винеровским процессом.

Задача 1. Пусть $w(t)$− стандартный винеровский процесс. Зададим случайный процесс $\widehat{w}(t)$ при помощи соотношения

$$\widehat{w}(t) = a_0 + \frac{t}{\tau}(a_1 - a_0) + w(t) - \frac{t}{\tau} w(\tau)$$

Случайный процесс $\widehat{w}(t)$ *называется* броуновским мостом, заданным на интервале времени $[0, \tau]$ с граничными значениями $\widehat{w}(0) = a_0$, $w(\tau) = a_1$. Найти математическое ожидание и ковариационную функцию процесса $\widehat{w}(t)$.

Задача 2. Доказать, что условное распределение значения винеровского процесса в момент t, т.е. случайной величины $w(t), t_0 < t < t_1,$ при условиях на границах временного интервала: $w(t_0) = a_0$, $w(t_1) = a_1,$ т.е. при закрепленных концах траектории, является нормальным (гауссовским) с параметрами:

$$M[w(t)|w(t_0) = a_0, w(t_1) = a_1] = a_0 + \frac{a_1 - a_0}{t_1 - t_0}(t - t_0)$$

$$D[w(t)|w(t_0) = a_0, w(t_1) = a_1] = \frac{(t_1 - t)(t - t_0)}{t_1 - t_0}$$

Список рекомендуемой литературы

Основная:

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977.
2. Карлин С. Основы теории случайных процессов. - М.: Мир, 1973.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976.
4. Ширяев А.Н. Вероятность (в 2 томах) –М.: МЦНМО, 2004.

Дополнительная:

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Эдиториал УРСС, 2003.
2. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Случайные процессы.- М.: Физматлит, 2003.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – М.: Высшая школа, 2001.
4. Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М. Случайные процессы – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.
5. Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н. Теория массового обслуживания. – М.: Высшая школа, 1982.
6. Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах. – М.: Физматлит, 2002.
7. Розанов Ю.А. Введение в теорию случайных процессов . – М.: Наука, 1982.